

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ
SAMRAS-2017
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ
ЗАОЧНОГО ТУРА № 1



Самара, 2017г.

Дорогие Друзья!

Все задачи, представленные Вашему вниманию в данном релизе, являются оригинальными и составлены в соответствии с *Перечнем вопросов по астрономии, рекомендуемых предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады по астрономии и физике космоса для подготовки школьников 10-11 классов к решению задач заключительного этапа Олимпиады.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач заочной олимпиады по астрономии SAMRAS-2017 среди обучающихся 10-11 классов заочного тура № 1». – <http://v937184r.bget.ru/SamRAS.htm>

Автор задач – Филиппов Юрий Петрович, научный руководитель школы, старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева, к.ф.-м.н., методист СДДЮТ.

Верстка в системе L^AT_EX – Филиппов Ю.П.

Памятка участника SamRAS-2017

- 1. Официальная страница Астрошколы:*
<http://v937184r.bget.ru/SamRAS.htm>
- 2. Официальная группа в VK:* <http://vk.com/samrasolimp>
- 3. Сроки подачи работ SamRAS-2017 тура № 1 на проверку:*
10.10.2016-15.12.2016!!!
- 4. Электронный ящик SamRAS-2017:* samrasolimp@mail.ru
- 5. Методические указания по решению задач заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2017:*
[http://v937184r.bget.ru/AstroSchool/Basic%20Documents/Guide-on-Tasks\[2017\]_SamRAS.pdf](http://v937184r.bget.ru/AstroSchool/Basic%20Documents/Guide-on-Tasks[2017]_SamRAS.pdf)
ИЛИ
https://vk.com/doc-57032141_437742356

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника заочной олимпиады SamRAS-2017, **внимательно** ознакомьтесь с «**Методическими указаниями по решению задач заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2017**»! Электронный адрес последних указан в **Памятке участника.**

Уровень «Новичок» (уровень А)**Задача № 1. «Ярчайшие звезды скопления Плеяды»**

Условие. Вашему вниманию в таблице 1 представлены 14 наиболее ярких звезд рассеянного скопления Плеяды (видимых особо зорким невооруженным глазом). Данное скопление в октябре-декабре можно наблюдать практически всю ночь. На копии фотографии скопления, представленной на рис. 1, укажите их положения в скоплении. (За правильное указание положений от 1 до 6 звезд начисляется 1 балл, от 6 до 11 звезд – 2 балла, 12 и более звезд – 3 балла).

Название	Обозначение	Видим. звезд. вел-на	Спектр. класс
Альциона	η , (25) Тельца	2.86	B7IIIe
Атлас	27 Тельца	3.62	B8III
Электра	17 Тельца	3.70	B6IIIe
Майя	20 Тельца	3.86	B7III
Меропа	23 Тельца	4.17	B6IV
Тайгета	19 Тельца	4.29	B6V
Плейона	BU (28) Тельца	5.09	B8IVep
Целено	16 Тельца	5.44	B7IV
Астеропа I	21 Тельца	5.64	B8Ve
–	18 Тельца	5.65	B8V
	HD23923	6.15	B8V
	24 Тельца	6.25	B9p
Астеропа II	22 Тельца	6.41	B9V
	26 Тельца	6.45	F0

Таблица 1: ярчайшие звезды рассеянного скопления Плеяды.

Задача № 2. «Свойства ярчайших звезд скопления Плеяды»

Условие. С использованием данных таблицы 1, определите: 1) какова средняя эффективная температура поверхности первых 13 звезд (по блеску) скопления? 2) какие из представленных звезд скопления относятся к классу гигантов? 3) какая звезда из представленного списка создает освещенность у поверхности Земли, в 2.512 раза меньшую освещенности самой яркой звезды скопления? (За каждый правильный ответ 1 балл).



Рис. 1: рассеянное скопление Плеяды (источник – <http://www.astrogalaxy.ru>).

Задача № 3. «Поле тяготения орбитальной станции и полет канареек»

Условие. Определите период вращения орбитальной станции, имеющей форму тора радиуса $R=62.5$ м, необходимого для создания внутри станции искусственного поля тяготения, эквивалентного земному. Ускорение свободного падения на поверхности Земли принять равным 10 м/с^2 . Если на такой станции из клетки выпустить двух канареек, которые полетят в противоположных направлениях, вдоль корпуса станции, то какой канарейке будет существенно легче лететь? (3 балла).

Задача № 4. «Восходы Луны и Земли»

Условие. Оцените время, в течение которого может длиться восход Луны (без учета рефракции света) для земного наблюдателя. Какова продолжительность восхода Земли, если ее наблюдать с поверхности Луны. (4 балла).

Задача № 5. «Мерцание звезд и неизменный блеск планет»

Условие. Как известно, одной из отличительных особенностей планет (в сравнение со звездами) является отсутствие у них мерцания света. Почему мерцают звезды и не мерцают планеты? Всегда ли данный факт имеет место? (4 балла).

Задача № 6. «Температура и время жизни черной дыры БАК»

Условие. Определите максимальную массу черной дыры, которую можно создать, в принципе, на Большом адронном коллайдере (БАК), если максимальная полная энергия протона в каждом пучке 7 ТэВ. Определите время жизни (τ_{life}) и температуру (T_{BH}) такой черной дыры с использованием формул вида:

$$\tau_{\text{life}} = \frac{5120 \pi G^2 \mathfrak{M}_{\text{BH}}^3}{\hbar c^4}, \quad T_{\text{BH}} = \frac{\hbar c^3}{8 \pi k G \mathfrak{M}_{\text{BH}}}, \quad (1)$$

здесь $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² – гравитационная постоянная, \mathfrak{M}_{BH} – масса черной дыры, $k = 1.381 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)**Задача № 7. «Освещенности от полных Луны и Земли»**

Условие. Как известно, альbedo Земли в 6 раз больше соответствующего значения альbedo Луны. Во сколько раз освещенность поверхности Луны полной Землей больше соответствующей освещенности, создаваемой полной Луной у поверхности Земли? Следует также учесть, что диаметр Земли в 4 раза больше соответствующего размера Луны. (6 баллов).

Задача № 8. «Соединение Венеры и Сатурна»

Условие. В январе 2016 года произошло соединение Венеры и Сатурна. С использованием фотографии планет, полученной белорусским астрофотографом И. Хомичем и представленной на рис. 2, оцените угловое расстояние между планетами. В расчетах следует полагать орбиты Земли и Венеры



Рис. 2: Венера и Сатурн в соединении (автор – И. Хомич, источник: astro-alert.ru).

круговыми. Диаметр Венеры равен $D_V = 12104$ км, ее большая полуось – $a_V = 0.723$ а.е. (7 баллов).

Задача № 9. «Расстояние до Сатурна»

Условие. С использованием результатов предыдущей задачи, оцените расстояние до Сатурна, на момент создания фотографии 2. В расчетах следует полагать орбиты Земли и Сатурна круговыми. Большая полуось орбиты Сатурна равна 9.58 а.е. (8 балла).

Задача № 10. «Масштабы галактик»

Условие. Некоторая спиральная галактика наблюдается с Земли как эллиптический диск с угловыми размерами $1' \times 0.5'$, а красное доплеровское смещение в спектрах этой галактики составляет $\Delta\lambda/\lambda_0 = 0.03$. Определите, какая галактика больше по размерам – данная, наша – Млечный путь или Галактика Андромеды (М31)? Постоянную Хаббла считать равной $H=68$ км/(с·Мпк). (8 баллов).

Задача № 11. «Полночное солнечное затмение и полуденное лунное затмение»

Условие. Определите географические широты мест на поверхности Земли, с которых можно наблюдать солнечное затмение в полночь и лунное затмение в полдень. В расчетах следует учесть конечность размеров видимых дисков Солнца и Луны, а также явление рефракции света. (9 баллов).

Задача № 12. «Рельсотрон на Луне»

Условие. Определите большую полуось и эксцентриситет эллипса орбиты снаряда, выпущенного с поверхности Луны с помощью электромагнитного рельсотрона параллельно ее поверхности, в направлении "от Земли". Масса снаряда равна $m = 5$ кг, а его начальная кинетическая энергия $E_0 = 10$ МДж. Определите также расстояние до апоселения орбиты снаряда. Чему должна быть равна минимальная кинетическая энергия снаряда на выходе из рельсотрона, чтобы он смог начать необратимое путешествие по Солнечной системе? Притяжением Земли пренебречь. (10 баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Космический корабль будущего и двойная звезда»

Условие. Космический корабль будущего, двигаясь с выключенными двигателями со скоростью 2.5 км/с, прошел на расстоянии 1.5 пк от спектрально двойной звезды, у которой период колебаний спектра равен суткам, а большая полуось орбиты составляет 0.1 а.е. Сможет ли корабль покинуть поле тяготения данной звезды, не включая двигателей? (11 баллов).

Задача № 14. «Заход Солнца за горизонт»

Условие. Вычислите с учетом явления рефракции продолжительность захода Солнца за горизонт. Представить полученный результат как функцию широты местности и склонения светила. В расчетах могут оказаться полезными эмпирические формулы

1) **Беннетта** для определения величины рефракции δh (в угловых минутах) в зависимости от видимой высоты светила h_a (в градусах):

$$\delta h = \operatorname{ctg} \left(\frac{h_a}{1^\circ} + \frac{7.31^\circ}{h_a + 4.4^\circ} \right), \quad (2)$$

2) **Смардсона** для определения величины рефракции δh (в угловых минутах) в зависимости от истинной высоты светила h_0 (в градусах):

$$\delta h = 1.02 \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{h_0}{1^\circ} + \frac{10.3^\circ}{h_0 + 5.1^\circ} \right). \quad (3)$$

(12 баллов).

Задача № 15. «Увеличение продолжительности дня за счет явления рефракции»

Условие. С использованием результатов решения предыдущей задачи и эмпирических формул (2), (3), вычислите промежуток времени ($\Delta\tau_d$), на который увеличивается продолжительность дня за счет явления рефракции света в атмосфере Земли. Искомый результат следует представить как функцию широты местности и склонения Солнца. Постройте график зависимости $\Delta\tau_d$, как функцию склонения Солнца для широты г. Самары ($\varphi_S = 53^\circ 12'$). При каких значениях склонения Солнца искомая величина принимает максимальное значение? В какие времена года это бывает? (12 баллов).

Задача № 16. «Период малых поперечных колебаний космической станции в системе "Земля-Луна"»

Условие. Определите период малых поперечных колебаний космической станции в плоскости, перпендикулярной прямой "Земля-Луна" относительно точки, в которой силы притяжения Луны и Земли равны. Землю и Луну считать неподвижными. (13 баллов).

Задача № 17. «Топ-13 ближайших к Солнцу звезд и гравитационная граница Солнечной системы»

Условие. В таблице 2 Вашему вниманию представлены Топ-13 ближайших к Солнцу звезд, расположенных в пределах сферы радиусом 10.6 св. лет, с центром, совпадающим с центром Солнечной системы. Определите какая из 13 ближайших звезд определяет гравитационную границу Солнечной системы. Последняя определяется минимальным значением радиуса сферы Хилла. Чему равен радиус такой сферы? (14 баллов).

Звезда	Сп. класс	M, m	α	δ	г, св. год	$\mathcal{M}, \mathcal{M}_\odot$
Проксима Центавра	M5.5Ve	15.53	$14^h 29^m 43.0^s$	$-62^\circ 40' 46''$	4.2421	0.123
α Центавра А	G2V	4.38	$14^h 39^m 36.5^s$	$60^\circ 50' 02''$	4.3650	1.10
α Центавра В	K1V	5.71	$14^h 39^m 35.1^s$	$-60^\circ 50' 14''$	4.3650	0.90
Звезда Барнарда	M4Ve	13.22	$17^h 57^m 48.5^s$	$+04^\circ 41' 36''$	5.9630	0.17
Вольф 359	M6V	16.55	$10^h 56^m 29.2^s$	$+07^\circ 00' 53''$	7.7825	0.11
Лаланд 21185	M2V	10.44	$11^h 03^m 20.1^s$	$+35^\circ 58' 12''$	8.2905	0.46
Сириус А	A1V	1.47	$06^h 45^m 08.9^s$	$-16^\circ 42' 58''$	8.5828	2.02
Сириус В	DA2	11.34	$06^h 45^m 08.9^s$	$-16^\circ 42' 58''$	8.5828	0.978
Лейтен 726-8 А	M5.5Ve	14.92	$01^h 39^m 01.3^s$	$-17^\circ 57' 01''$	8.7280	0.10
Лейтен 726-8 В	M6.0Ve	15.37	$01^h 39^m 01.3^s$	$-17^\circ 57' 01''$	8.7280	0.10
Росс 154	M3.5Ve	13.07	$18^h 49^m 49.4^s$	$+23^\circ 50' 10''$	9.6813	0.17
Росс 248	M5.5Ve	14.79	$23^h 41^m 54.7^s$	$+44^\circ 10' 30''$	10.322	0.136
ϵ Эридана	K2V	6.19	$03^h 32^m 55.8^s$	$09^\circ 27' 30''$	10.522	0.82

Таблица 2: Данные наблюдений для ближайших 13 звезд (* – здесь расстояние указано в св. минутах).

Планеты земной группы				
Название	r_p , а.е.	\mathcal{R}_p , км	P_p , сут	$\mathcal{M}_p, \mathcal{M}_\odot$
Меркурий	0.387	2440	58.646	0.0527
Венера	0.723	6052	243.019	0.8148
Земля	1.000	6378	0.997	1.0000
Марс	1.520	3397	1.026	0.1075
Планеты-гиганты				
Название	r_p , а.е.	\mathcal{R}_p , км	P_p , сут	$\mathcal{M}_p, \mathcal{M}_\odot$
Юпитер	5.204	71492	0.4135	317.83
Сатурн	9.582	60268	0.4440	95.16
Уран	19.189	25559	0.7183	14.5
Нептун	30.071	24764	0.6713	17.20

Таблица 3: значения гелиоцентрического расстояния (r_p), радиуса (\mathcal{R}_p), периода вращения (P_p) и массы (\mathcal{M}_p) для классических планет Солнечной системы.

Задача № 18. «Космический лифт и запуск КА с помощью него»

Условие. Одним из альтернативных ракетному способу доставки грузов на околоземную орбиту и запуска космических аппаратов к другим телам Солнечной системы является использование *космического лифта (КЛ)*. Последний представляет собой космическую транспортную систему, работа которой основана на придании поднимаемому грузу энергии и момента импульса орбитального движения за счет вращения Земли. Т.е. если протянуть трос от Земли за геостационарную орбиту, то можно доставлять по нему грузы, при этом у тела, отпущенного с троса, уже будет начальная скорость. На верхнем конце троса должна быть размещена балансировочная масса для удержания конструкции в равновесии. В этом случае гравитационная и центробежная силы будут обеспечивать натянутость троса (это суть концепции космического лифта). Определите

а) относительную экономию энергии (в процентах) при доставке груза на

орбиту с помощью КЛ в сравнение с ракетным способом;

- б) геоцентрические расстояния r_ℓ , на которых необходимо запускать космические аппараты (КА) с троса КЛ к восьми классическим планетам (некоторые характеристики которых представлены в таблице 3), по эллиптической траектории Гомана-Ветчинкина.

В какое время суток следует запускать КА к верхним планетам? К нижним планетам? (15 баллов).



РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Ярчайшие звезды скопления Плеяды»

Решение: на рис. 3 представлены положения 14 наиболее ярких звезд рассеянного скопления Плеяды.



Рис. 3: к определению положения 14 ярчайших звезд рассеянного скопления Плеяды.

Ответ: представлен рис. 3. (За правильное указание положений от 1 до 6 звезд начисляется 1 балл, от 6 до 11 звезд – 2 балла, 12 и более звезд – 3 балла).

Задача № 2. «Свойства ярчайших звезд скопления Плеяды»

Решение: 1. В таблице 1 нетрудно заметить, что первые тринадцать звезд представленного списка относятся к спектральному классу В (см. последнюю колонку таблицы), средняя эффективная температура поверхности которых составляет $2 \cdot 10^4$ К.

2. В последней колонке представлены римскими цифрами классы светимости, к которым относятся данные звезды. Как известно, третий класс све-

тимости представляет собой класс гигантов, светимости которых в $10^1 \div 10^3$ раз больше светимости Солнца, а радиусы в $10^1 \div 10^2$ раз больше солнечного. Очевидно, к гигантам можно отнести Альциону, Атлас, Электру и Майю.

3. Самой яркой звездой скопления является, очевидно, Альциона. Ее звездная величина равна 2.86^m . Если какая-либо звезда скопления создает у поверхности Земли освещенность в 2.512 раза меньшую, чем Альциона, то ее блеск должен быть, согласно правилу Погсона, на $+1^m$ больше, чем у Альционы. Следовательно, блеск искомой звезды должен быть равен 3.86^m . Согласно колонке 3 таблицы 1, искомой звездой является Майя.

Ответ: 1) $T = 2 \cdot 10^4$ К; 2) Альциона, Атлас, Электра и Майя; 3) Майя. ($S_{\max} = 3$ баллов).

Задача № 3. «Поле тяготения орбитальной станции и полет канареек»

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$R = 62.5$ м, $g = 10$ м/с ² .	В космическом пространстве, вдали от массивных тел (звезд, планет) поле тяготения мало. Станция в данных слабом поле постоянно падает и, потому все тела, в том числе и люди испытывают состояние невесомости. Длительное пребывание в невесомости приводит к деградации мышц, кости становятся более хрупкими. Поэтому одно из главных условий для длительного пребывания человека в космосе – создание условий близких к земным, в том числе, создание возможности перемещения по станции посредством опоры на корпус станции.
<u>Найти:</u> T , какой канарейке легче – ?	

В результате взаимодействия подвижных предметов внутри станции с воздухом (которым должна быть заполнена станция для нормального жизнеобеспечения ее экипажа), и многократных столкновений, все предметы будут вовлечены во вращательное движение станции и будут отброшены на внешнюю стенку станции. *Пребывание какого-либо тела на станции в условиях, эквивалентных земным, подразумевает, что во вращательном движении вес данного тела будет равен его весу на поверхности Земли.* По третьему закону Ньютона, вес тела, оказываемого на внешнюю стенку станции равен по модулю силе реакции стенки. Следовательно, центробежная сила, действующая на каждое такое тело, будет равна его силе реакции, а последняя – силе земной тяжести, т.е.

$$m a_{\text{ц.с.}} = N = m g \Rightarrow \frac{4 \pi^2}{T^2} r = g, \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} = 5\pi = 15.7 \text{ с.}$$

Если канарейка полетит в направлении, противоположном направлению вращения станции со скоростью v , то относительно геометрического центра станции ее скорость будет равна $|V - v|$, где V – линейная скорость станции.

Следовательно, своими крыльями канарейка должна создавать центробежную силу, равную

$$F_1 = m \frac{(V - v)^2}{R}.$$

Если ее скорость $v \approx V$, то ее усилия будут минимальны, и будут направлены лишь на поддержание себя в воздухе. Однако, для канарейки, полетевшей по направлению вращения станции относительная скорость будет равна $V + v$, а центробежная сила –

$$F_2 = m \frac{(V + v)^2}{R}.$$

Очевидно, что

$$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{V - v}{V + v} \right)^2 < 1,$$

т.о. канарейке, полетевшей в направлении противоположном направлению вращения станции, будет существенно легче лететь.

Ответ: $T = 15.7$ с; канарейке, полетевшей в направлении противоположном направлению вращения станции, будет существенно легче лететь. ($S_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Восходы Луны и Земли»

Решение: рассмотрим движение Луны (см. рис. 4) вблизи горизонта (I). Поскольку угловые размеры Луны много меньше угловых размеров видимой дуги суточной параллели (II), следовательно, часть ее суточной параллели (II) вблизи горизонта можно представить прямой линией.

В результате суточного вращения небесной сферы (обусловленного вращением Земли вокруг своей оси) Луна перемещается по небосводу вдоль суточной параллели (II) с угловой скоростью (ω_{vis}) видимого движения, равной

$$\omega_{\text{vis}} = \omega_{\oplus} \cos \delta_{\zeta}, \quad \text{где } \omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{P_{\oplus}} = 15''/\text{с}. \quad (4)$$

здесь $\omega_{\oplus}, T_{\oplus}$ – угловая скорость и период обращения Земли вокруг своей оси, причем $P_{\oplus} = 86164$ с; δ_{ζ} – склонение Луны в момент восхода. Заметим, что угол наклона орбиты Луны к плоскости эклиптики равен $i_{\zeta} = 5^{\circ}9'$, в свою

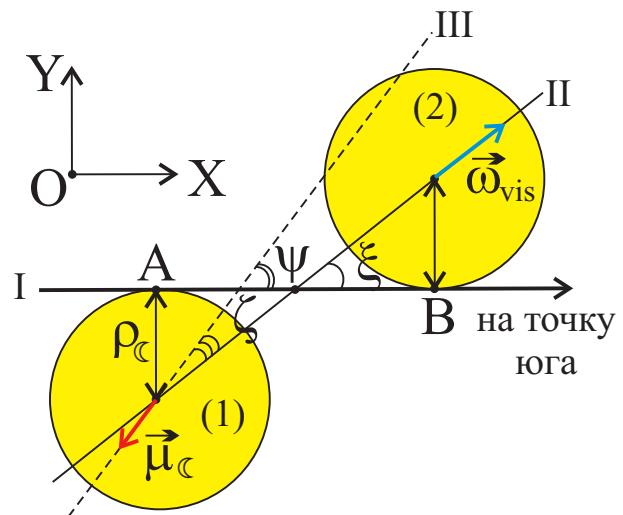


Рис. 4: к определению времени восхода Луны.

очередь эклиптика наклонена к плоскости горизонта под углом $\varepsilon = 23^\circ 26'$, следовательно, склонение Луны может принимать значения из интервала

$$-\delta_{\max} \leq \delta_{\zeta} \leq \delta_{\max}, \text{ где } \delta_{\max} = \varepsilon + i_{\zeta}, \Rightarrow -28^\circ 35' \leq \delta_{\zeta} \leq +28^\circ 35'. \quad (5)$$

Суточная параллель Луны, очевидно, образует с горизонтом угол $\xi \leq 90^\circ - \varphi$, где φ – широта места наблюдения. Поскольку склонение Луны принимает значения много меньше 90° , то далее ради простоты будем полагать $\xi \approx 90^\circ - \varphi$. В результате обращения Луны и Земли вокруг их центра масс, Луна совершает собственное движение по небосводу относительно далеких звезд со скоростью μ_{ζ} вдоль дуги (III), причем

$$\mu_{\zeta} = \frac{360^\circ}{T_{\zeta}} = 0.55''/\text{с}. \quad (6)$$

Дуга собственного движения Луны по небосводу образует угол $\psi = \xi + \zeta$ с горизонтом, последний может изменяться в пределах:

$$(\varepsilon - i_{\zeta}) \leq |\zeta| \leq \varepsilon + i_{\zeta}, \Rightarrow 61^\circ 25' - \varphi \leq \psi \leq +118^\circ 35' - \varphi. \quad (7)$$

Начало восхода традиционно отождествляется с моментом времени (t_A), когда верхняя точка (А) видимого диска Луны касается горизонта (см. рис. 4, положение диска (1)). Окончание восхода отождествляется с моментом времени (t_B), когда нижняя точка (В) видимого диска Луны будет касаться горизонта (см. рис. 4, положение диска (2)). Полная угловая скорость видимого движения Луны относительно горизонта, согласно закону сложения скоростей, представляется в виде:

$$\vec{\omega}_{\zeta} = \vec{\omega}_{\text{vis}} + \vec{\mu}_{\zeta}. \quad (8)$$

Введем декартову систему координат ОХУ так, как показано на рис. 4. За восход Луны будет отвечать лишь y -проекция полной угловой скорости Луны ($\omega_{\zeta y}$). Тогда время восхода Луны есть

$$\tau_{\text{rise}} = t_B - t_A = \frac{2\rho_{\zeta}}{|\omega_{\zeta y}|} = \frac{D''_{\zeta}}{|\omega_{\text{vis}} \sin \xi - \mu_{\zeta} \sin \psi|}, \quad (9)$$

здесь ρ_{ζ} , D''_{ζ} – угловые радиус и диаметр Луны соответственно (последний как известно, равен $D''_{\zeta} = 32'$). Результат (9) можно представить в виде:

$$\tau_{\text{rise}} = \frac{\tau_0}{|\cos \delta_{\zeta} \cos \varphi - \gamma \cos(\varphi - \zeta)|}, \quad (10)$$

$$\text{где } \tau_0 = \frac{D''_{\zeta}}{\omega_{\oplus}} = 128 \text{ с}, \quad \gamma = \frac{\mu_{\zeta}}{\omega_{\oplus}} = 0.037. \quad (11)$$

Далее анализ искомой величины является существенно сложным, поэтому рассмотрим следующие частные случаи:

1. Восход Луны на неполярных широтах: т.е. $\varphi \ll 90^\circ$, следовательно, тогда второе слагаемое в знаменателе дроби (10) мало и им можно пренебречь. В итоге

$$\tau_{\text{rise}} = \frac{\tau_0}{\cos \delta_\zeta \cos \varphi}$$

Очевидно, что минимальное значение ($\tau_{\text{rise}}^{\text{min}}$) времени восхода достигается на экваторе ($\varphi = 0$), когда склонение Луны равно $\delta_\zeta = 0^\circ$, при этом $\tau_{\text{rise}}^{\text{min}} = \tau_0 = 128$ с. Максимальное значение величины достигается τ_{rise} при максимальном значении φ ($\varphi = 90^\circ$), где последняя формула "не работает".

2. Восход Луны вблизи северного географического полюса: тогда $\varphi \approx 90^\circ$, тогда согласно (10), имеем

$$\tau_{\text{rise}} \approx \frac{\tau_0}{\gamma \cos(90^\circ - \zeta)} \approx \frac{\tau_0}{\gamma \sin \zeta}.$$

Поскольку здесь небесный экватор совпадает с горизонтом, то τ_{rise} достигает своего максимума, в случае, когда $\zeta = \zeta_{\text{min}} = \varepsilon - i_\zeta$. При этом $\tau_{\text{rise}}^{\text{max}} = 3.06$ часа.

Поскольку Луна повернута всегда к Земле одной стороной, то на поверхности Луны нельзя увидеть восход Земли (если не учитывать малый эффект – либрации).

Ответ: восход Луны может длиться от 2.13 мин до 3.06 часа. На поверхности Луны нельзя увидеть восход Земли (если не учитывать малый эффект – либрации). ($S_{\text{max}} = 4$ балла).

Задача № 5. «Мерцание звезд и неизменный блеск планет»

Решение: главными причинами мерцания звезд является **рефракция света**, пришедшего от звезд на неоднородностях атмосферы Земли и малость их угловых размеров. Поясним суть сказанного ¹.

Приходя к поверхности Земли, лучи света звезд пронизывают земную атмосферу и в ее нижних слоях встречают на своем пути турбулентные вихри, порожденные температурными неоднородностями. Размеры температурных неоднородностей воздуха составляют $10 \div 25$ см и больше, а располагаются они от приземного слоя до границы тропосферы ($7 \div 17$ км в зависимости от широты). И хотя эти неоднородности по величине весьма малы, всего доли градуса, однако этого оказывается достаточно, чтобы из-за зависимости коэффициента преломления воздуха от его температуры длина пути луча света изменилась на доли длины волны. Это в свою очередь приводит к искажению

¹Часть материала для решения взята из книги А. М. Романова Занимательные вопросы по астрономии и не только. – М.:МЦНМО. – 2005. – 415с.

фазового фронта световой волны и малому, но заметному отклонению луча света в данной области от прямой линии.

Величина этих «уклонений» составляет от долей до нескольких угловых секунд. Поэтому при прохождении параллельных лучей света через атмосферу на какой-либо перпендикулярной поверхности вместо равномерного освещения образуется хаотичный узор световых пятен, которые к тому же находятся в постоянном движении (дрожании) с частотой от единиц до нескольких сотен герц. Этот эффект называется *атмосферным дрожанием изображения*. Угловые диаметры звезд не превосходят $0.01''$, и потому за пределами атмосферы они всегда видны как точечные объекты, а свет от них, можно считать, распространяется в виде пучка лучей практически параллельных друг другу. Рефракция света в атмосфере Земли приводит к "размазыванию" образа звезды и неравномерному распределению потока ее света по площадке – *диску атмосферного дрожания*, его хаотическому изменению.

Атмосферную турбулентность можно легко пронаблюдать визуально на примере изображения далекого предмета, глядя вдоль нагретой солнцем поверхности или сквозь пламя свечи.

При наблюдении звезд ночью, зрачок человеческого глаза расширяется в темноте до 7 мм, но по сравнению с размерами неоднородностей и "световых пятен" все равно остается практически «точечным» приемником света. Соответственно, освещенность, создаваемая какой-либо звездой на зрачке и далее на сетчатке глаза, быстро и хаотически изменяется от максимального значения и до нуля, иными словами, звезда «мерцает». Временное разрешение нашего зрения составляет около 0.1 с, поэтому за каждую секунду глаз успевает заметить несколько наиболее ярких всплесков света от звезды. А поскольку разные световые импульсы от звезды попадают при этом и на разные светочувствительные клетки (палочки) в сетчатке глаза, то видимые на небе звезды представляются нам не только «мерцающими», но к тому же еще и «лучистыми». Именно так, «с лучами» всегда звезды и изображают, хотя в действительности никаких лучей у звезд не существует.

Если наблюдать звезды в телескоп, который имеет существенно больший размер объектива, чем зрачок глаза, то, начиная с диаметра объектива $0.5 \div 1$ м, на всю площадь объектива телескопа будет приходиться уже несколько разных атмосферных неоднородностей. Поэтому в больших телескопах звезды, во-первых, уже не мерцают, а, во-вторых, их изображение начинает распадаться на несколько отдельных световых пятен, которые называются "спеклами".

Размер каждого спекла определяется дифракционным пятном для данного объектива (например, для зеркала диаметром 1 м дифракционное разрешение в видимом свете составляет около $0.1''$). Все спеклы располагаются (и

"дрожат") внутри т.н. диска атмосферного дрожания, размеры которого в десятки раз больше и составляют $1'' \div 5''$.

Именно атмосферное дрожание представляет собой наиболее серьезное препятствие для повышения углового разрешения наземных телескопов, и астрономы всегда стараются разместить свои инструменты в местах с наилучшими астроклиматическими условиями (например, на вершинах гор).

Как известно, угловой диаметр дисков планет Солнечной системы, в принципе, видимых невооруженным глазом составляет от нескольких секунд до $65''$, что как правило, больше углового диаметра диска атмосферного дрожания, следовательно, глаз человека, наблюдающий планету, принимает ее свет одновременно от разных ее участков, распространяющийся по разным траекториям в атмосфере, и все дрожания отдельных лучей складываются и сглаживаются в пределах их видимых дисков, потому у планет скачков потока света мы не фиксируем и они видны как источники света постоянного потока.

Однако, в случае очень сильных конвекционных потоков (например, в случае очень жаркой погоды) в атмосфере Земли наблюдается увеличение размеров ее неоднородностей, что приводит к увеличению размеров диска атмосферного дрожания до $10''$ и более. И для планет с небольшими угловыми диаметрами (Меркурий, Марс, Уран), "эффект сглаживания" перестает работать. Видимые образы планет начинают тоже дрожать. ($S_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «Температура и время жизни черной дыры БАК»

<u>Дано:</u> $E_{\max} = 7 \text{ ТэВ.}$	<u>Решение:</u> Для определения максимальной массы черной дыры, учтем, что она порождается в результате центрального столкновения двух протонов, с одинаковой начальной кинетической энергией ($E_{\max 1} = E_{\max 2} = E_{\max}$) и импульсами ($ \vec{p}_1 = \vec{p}_2 = p$) с противоположными направлениями.
<u>Найти:</u> $\mathfrak{M}_{BH}^{(\max)}, \quad \tau_{\text{life}},$ $T_{BH} - ?$	

При центральном столкновении

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0,$$

при этом продукт реакции их взаимодействия должен находиться в состоянии относительного покоя. Тогда вся энергия протонов перейдет в энергию покоя образовавшейся черной дыры:

$$2E_{\max} = \mathfrak{M}_{BH}^{(\max)} c^2, \Rightarrow \mathfrak{M}_{BH}^{(\max)} = \frac{2E_{\max}}{c^2} = 2.49 \cdot 10^{-23} \text{ кг.}$$

С использованием формул (1) легко вычислить время жизни (τ_{life}) и температуру (T_{BH}) такой черной дыры:

$$\tau_{\text{life}} = 1.29 \cdot 10^{-84} \text{ с, } T_{BH} = 4.94 \cdot 10^{45} \text{ К.}$$

Ответ: $\mathfrak{M}_{BH}^{(\max)} = 2.49 \cdot 10^{-23}$ кг; $\tau_{\text{life}} = 1.29 \cdot 10^{-84}$ с, $T_{BH} = 4.94 \cdot 10^{45}$ К. (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Освещенности от полных Луны и Земли»

<p><u>Дано:</u> $A_{\oplus}/A_{\zeta} = 6,$ $\mathfrak{R}_{\oplus}/\mathfrak{R}_{\zeta} = 4.$</p>	<p style="text-align: center;"><u>Решение:</u></p> <p>Солнце у поверхности Земли (Луны) создает освещенность</p> $E_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2}, \quad (12)$
<p><u>Найти:</u> $E_{\oplus}/E_{\zeta} - ?$</p>	<p>здесь a_{\oplus} – большая полуось земной орбиты (здесь и далее мы пренебрегаем различием гелиоцентрических расстояний Земли и Луны). На поверхность Земли и Луны падают потоки излучения</p>

$$\Phi_{\odot}^{(0)} = E_{\odot} \pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2, \quad \Phi_{\zeta}^{(0)} = E_{\odot} \pi \mathfrak{R}_{\zeta}^2, \quad (13)$$

где $\mathfrak{R}_{\oplus}, \mathfrak{R}_{\zeta}$ – радиусы Земли и Луны соответственно. Потоки излучения, отброшенные поверхностями данных тел обратно в космос есть

$$\Phi_{\oplus}^{(\text{sca})} = A_{\oplus} E_{\odot} \pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2, \quad \Phi_{\zeta}^{(\text{sca})} = A_{\zeta} E_{\odot} \pi \mathfrak{R}_{\zeta}^2. \quad (14)$$

Данные потоки высвечиваются по всем направлениям, следовательно, освещенность, создаваемая Луной у поверхности Земли, есть

$$E_{\zeta} = \frac{\Phi_{\zeta}^{(\text{sca})}}{4\pi \Delta^2}. \quad (15)$$

здесь и далее Δ – геоцентрическое расстояние Луны. Освещенность, создаваемая Землей у поверхности Луны, представляется так:

$$E_{\oplus} = \frac{\Phi_{\oplus}^{(\text{sca})}}{4\pi \Delta^2}. \quad (16)$$

Следовательно, отношение освещенностей есть

$$\frac{E_{\oplus}}{E_{\zeta}} = \frac{A_{\oplus}}{A_{\zeta}} \left(\frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\zeta}} \right)^2 = 96. \quad (17)$$

Ответ: $E_{\oplus}/E_{\zeta} = 96$. (6 баллов).

Задача № 8. «Соединение Венеры и Сатурна»

Дано:

$$D_V = 12104 \text{ км},$$

$$a_V = 0.723 \text{ а.е.}$$

Найти:

$$d''_{V-S} - ?$$

Решение:

Прежде всего заметим, что на фотографии отчетливо видно, что фаза Венеры близка к 0.5. Следовательно, данная фотография была сделана вблизи наибольшей элонгации Венеры (см. рис. 5). Поскольку орбиты Земли и Венеры являются круговыми, то можно по теореме Пифагора (для $\triangle ESV$) вычислить геоцентрическое расстояние до планеты:

$$\Delta = \sqrt{a_{\oplus}^2 - a_V^2} = 0.691 \text{ а.е.} \quad (18)$$

Теперь можно легко вычислить угловой диаметр планеты:

$$D''_V = \frac{D_V}{\Delta} 206265'' = 24.2'' \quad (19)$$

По рис. 2 можно определить с помощью линейки диаметр планеты d_V , и расстояние между планетами d_{V-S} . В нашем случае они получились равными $d_V = 7 \text{ мм}$, а расстояние между планетами – $d_{V-S} = 162 \text{ мм}$ (в Вашем случае эти величины могут принимать иные значения, все зависит от линейных размеров используемой фотографии).

Далее определим угловой масштаб фотографии

$$\mu_a = \frac{D''_V}{d_V} = 3.45''/\text{мм}. \quad (20)$$

Следовательно, угловое расстояние между планетами есть

$$d''_{V-S} = \mu_a d_{V-S} = 560'' \approx 9.3'.$$

Ответ: $d''_{V-S} = 560'' \approx 9.3'$. (7 баллов).

Задача № 9. «Расстояние до Сатурна»

Дано:

$$a_S = 9.58 \text{ а.е.}$$

Найти:

$$\Delta_S - ?$$

Решение:

По данным предыдущей задачи определим угол α_{\max} наибольшей элонгации Венеры относительно Солнца:

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{a_V}{a_{\oplus}} = 0.723. \quad (21)$$

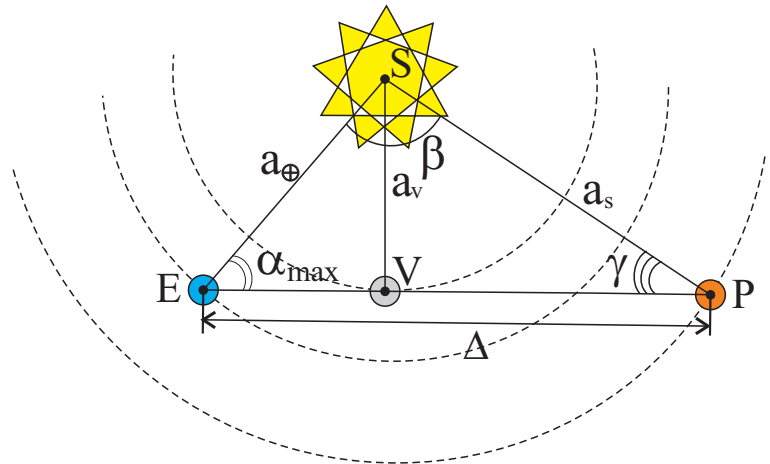


Рис. 5: к определению взаимного расположения Земли, Венеры, Сатурна и Солнца.

Данному значению соответствует угол $\alpha_{\max} = 46.3^\circ$. Поскольку $d'' \ll \alpha_{\max}$, то для Сатурна можно полагать что его угол текущей элонгации такой же как и у Венеры. Следовательно, можно рассмотреть плоский треугольник $\triangle SEP$ (см. рис. 5), для которого можно воспользоваться теоремой синусов:

$$\frac{\sin \alpha_{\max}}{a_s} = \frac{\sin \beta}{\Delta} = \frac{\sin \gamma}{a_{\oplus}},$$

из последнего равенства можно найти угол γ :

$$\gamma = \arcsin \left[\frac{a_{\oplus}}{a_s} \sin \alpha_{\max} \right] = \arcsin \left[\frac{a_v}{a_s} \right] = 4.3^\circ.$$

Учитывая, что сумма углов в треугольнике равна 180° , то

$$\beta = 180^\circ - \alpha_{\max} - \gamma = 129.4^\circ.$$

Тогда по теореме синусов имеем

$$\Delta = a_s \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha_{\max}} \right) = 10.24 \text{ а.е.}$$

Ответ: $\Delta = 10.24$ а.е. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 10. «Масштабы галактик»

Дано:

$$\begin{aligned} a \times b &= 1' \times 0.5', \\ \Delta\lambda/\lambda_0 &= 0.03, \\ H &= 68 \text{ км}/(\text{с} \cdot \text{Мпк}). \end{aligned}$$

Найти:

Наибольшая
галактика – ?

Решение:

Воспользуемся формулой для нерелятивистского эффекта Доплера (поскольку спектральное смещение $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ есть малая величина):

$$\frac{v_r}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \Rightarrow v_r = c \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right), \quad (22)$$

здесь v_r – лучевая скорость галактики, c – скорость света в вакууме. С другой стороны, лучевая скорость галактики удовлетворяет закону Хаббла:

$$v_r = H r, \Rightarrow r = \frac{v_r}{H} = \frac{c}{H} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right) = 132.4 \text{ Мпк}, \quad (23)$$

здесь H – постоянная Хаббла. Поскольку спиральная галактика видна как эллиптический диск, то ее большее измерение определяет ее истинный диаметр. Следовательно, в силу малости ее угловых размеров, линейный диаметр Галактики можно представить в виде:

$$D_G = r \alpha_{\max} = \frac{c}{H} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right) \frac{\alpha''_{\max}}{3438'} = 38.5 \text{ кпк} = 125.5 \cdot 10^3 \text{ св. лет.} \quad (24)$$

Как известно, диаметр галактики Млечный путь равен $D_1 = 10^5$ лет, галактики Андромеды – $D_2 = 2.20 \cdot 10^5$ св. лет. Следовательно, галактика Андромеда является самой большой в данной тройке.

Ответ: галактика Андромеда является самой большой в данной тройке. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11. «Полночное солнечное затмение и полуденное лунное затмение»

Решение:

1. Для определения географических широт мест на поверхности Земли, с которых можно наблюдать *солнечное затмение в полночь*, проанализируем ситуацию, описанную в условии задачи. С большей части поверхности Земли солнечное затмение можно наблюдать лишь в дневное время суток, поскольку в это время Солнце находится над горизонтом. Чтобы наблюдать солнечное затмение в полночь, необходимо чтобы Солнце или часть его видимого диска наблюдалась над горизонтом. Но это возможно лишь в околополярных широтах. Определим искомую широту. Учтем что склонение Солнца в течение года и Луны в течение 18.6 лет изменяется в пределах:

$$-\varepsilon \leq \delta_{\odot} \leq \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon = 23^{\circ}26', \quad (25)$$

$$-(\varepsilon + i_{\zeta}) \leq \delta_{\zeta} \leq \varepsilon + i_{\zeta}, \quad \text{где } i_{\zeta} = 5^{\circ}09'. \quad (26)$$

Поскольку у Солнца интервал допустимых значений для склонения является более узким, нежели у Луны, то именно Солнце задает ограничения на диапазон искомых значений для широты местности, где можно наблюдать указанные феномены. На это же указывает и то факт, что затмения происходят, когда Луна находится вблизи узлов своей орбиты (т.е. вблизи эклиптики).

Воспользуемся формулой для высоты истинного Солнца в нижней кульминации. В случае точечного Солнца, чтобы последнее было над горизонтом (в нижней кульминации), необходимо чтобы:

$$h_{\odot} = \varphi^{(1)} + \delta_{\odot} - 90^{\circ} \geq 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi^{(1)} \geq 90^{\circ} - \delta_{\odot}. \quad (27)$$

Следовательно, минимальное значение широты определяется неравенством

$$\varphi^{(1)} \geq 66^{\circ}34'.$$

В случае учета конечного размера видимого диска Солнца, данный феномен уже можно наблюдать, если верхняя точка видимого диска Солнца еще находится над горизонтом, а истинное Солнце находится на величину $\rho''_{\odot} = 16'$ ниже горизонта. Следовательно, ограничение на широту Солнца есть

$$h_{\odot} = \varphi^{(2)} + \delta_{\odot} - 90^{\circ} \geq -\rho''_{\odot}, \quad \Rightarrow \quad \varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} - \rho''_{\odot} \geq 66^{\circ}18'.$$

Явление рефракции света для светил на горизонте увеличивает их истинную высоту на $\delta h = 35'$. Следовательно, истинная высота истинного Солнца должна быть меньше видимой на δh . Тогда можно получить третье ограничение на широту местности:

$$h_{\odot} = \varphi^{(3)} + \delta_{\odot} - 90^{\circ} \geq -\rho''_{\odot} - \delta h, \Rightarrow \varphi^{(3)} = \varphi^{(1)} - \rho''_{\odot} - \delta h \geq 65^{\circ}43'.$$

Т.о. на широтах $[-90^{\circ}, -65^{\circ}43'] \cup [+65^{\circ}43', +90^{\circ}]$ возможно наблюдение указанного солнечного затмения.

2. Для определения географических широт мест на поверхности Земли, с которых можно наблюдать *лунное затмение в полдень*, заметим, что в полдень Луна должна быть над горизонтом (вблизи эклиптики), а Солнце – под горизонтом, в диаметрально противоположной точке эклиптики. При этом высота истинного Солнца в полдень должна удовлетворять неравенству (с учетом конечности размеров диска Солнца и явления рефракции, по аналогии с предыдущим случаем):

$$h_{\odot} = 90^{\circ} - \varphi^{(4)} + \delta_{\odot} \leq -\rho''_{\odot} - \delta h, \Rightarrow \varphi^{(4)} \geq 90^{\circ} + \delta_{\odot} + \rho''_{\odot} + \delta h = 67^{\circ}25'.$$

Т.о. на широтах $[-90^{\circ}, -67^{\circ}25'] \cup [+67^{\circ}25', +90^{\circ}]$ возможно наблюдение указанного лунного затмения.

Чтобы наблюдать оба типа затмений широта местности, очевидно, должна принадлежать интервалам $[-90^{\circ}, -67^{\circ}25'] \cup [+67^{\circ}25', +90^{\circ}]$.

Ответ: географические широты мест на поверхности Земли, с которых можно наблюдать солнечное затмение в полночь и лунное затмение в полдень, определяются интервалами $[-90^{\circ}, -67^{\circ}25'] \cup [+67^{\circ}25', +90^{\circ}]$. ($\$_{\max} = 9$ баллов).

Задача № 12. «Рельсотрон на Луне»

<u>Дано:</u> $m = 5$ кг, $E_0 = 10$ МДж.	<u>Решение:</u> Определим начальную скорость снаряда, выпущенного из рельсотрона. Для этого воспользуемся формулой для кинетической энергии:
<u>Найти:</u> $a, \varepsilon, Q, E_{\min} - ?$	$E_k = \frac{1}{2}mV_0^2, \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = 2 \text{ км/с.} \quad (28)$

Определим первую и вторую космические скорости у поверхности Луны:

$$V_I = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_{\zeta}}{\mathcal{R}_{\zeta}}} = 1.68 \text{ км/с}, \quad V_{II} = \sqrt{\frac{2G \mathcal{M}_{\zeta}}{\mathcal{R}_{\zeta}}} = 2.38 \text{ км/с}, \quad (29)$$

здесь $\mathcal{M}_{\zeta}, \mathcal{R}_{\zeta}$ – масса и радиус Луны. Т.о.

$$V_I < V_0 < V_{II}.$$

Очевидно, что точка старта снаряда есть переселений (ближайшая точка орбиты снаряда к центру Луны) его орбиты, поскольку его скорость была направлена перпендикулярна направлению на центр Луны, а величина скорости оказалась больше первой космической скорости Луны. С использованием законов сохранения механической энергии и момента импульса снаряда его скорость в переселении можно представить в виде:

$$V_q = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_\zeta}{q}} (1 + \varepsilon), \quad (30)$$

здесь q – расстояние до переселения орбиты снаряда, которое можно записать так

$$q = a(1 - \varepsilon) = \mathfrak{R}_\zeta, \quad (31)$$

где a, ε – большая полуось и эксцентриситет его эллиптической орбиты соответственно. С использованием результатов (28)-(31) можно определить большую полуось и эксцентриситет орбиты:

$$\varepsilon = \left(\frac{V_0}{V_I}\right)^2 - 1 = 0.42, \quad a = \mathfrak{R}_\zeta \left[2 - \left(\frac{V_0}{V_I}\right)^2\right]^{-1} = 1.72 \mathfrak{R}_\zeta = 2982 \text{ км.} \quad (32)$$

Расстояние до апоселения орбиты снаряда есть

$$Q = a(1 + \varepsilon) = \mathfrak{R}_\zeta \left(\frac{V_0^2}{V_{II}^2 - V_0^2}\right) = 2.40 \mathfrak{R}_\zeta = 4177 \text{ км.} \quad (33)$$

Для того чтобы снаряд начал необратимое путешествие по Солнечной системе, его начальная скорость должна быть не меньше второй космической скорости, т.е.

$$V_0 \geq V_{II}, \Rightarrow E_{\min} = \frac{1}{2} m V_{II}^2 = \frac{G m \mathfrak{M}_\zeta}{\mathfrak{R}_\zeta} = 14.11 \text{ МДж.} \quad (34)$$

Ответ: к задаче представляется результатами (32)-(34). ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Космический корабль будущего и двойная звезда»

Дано:

$$\begin{aligned} V_0 &= 2.5 \text{ км/с,} \\ r_0 &= 1.5 \text{ пк,} \\ T_s &= 1 \text{ сут,} \\ a &= 0.1 \text{ а.е.} \end{aligned}$$

Решение:

Прежде всего, заметим, что расстояние между компонентами спектральной двойной звезды много меньше расстояния от звезды до космического корабля, следовательно, двойную можно рассматривать как материальную точку

Найти:
Сможет ли покинуть – ?

с массой $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ – массы компонент двойной звезды.

Чтобы корабль смог покинуть гравитационное поле звезды необходимо, чтобы его полная механическая энергия была не меньше нуля, следовательно,

$$E_{\text{tot}} = E_k + E_p \geq 0, \Rightarrow E_k \geq -E_p, \Rightarrow m \frac{V_0^2}{2} \geq \frac{G m (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{r_0}, \Rightarrow$$

$$V_0 \geq \sqrt{\frac{2G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{r_0}}.$$

Для определения суммы масс компонент системы воспользуемся третьим обобщенным законом Кеплера для двух пар тел: данной двойной системы и системы "Солнце-Земля":

$$\frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)T^2}{(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus)T_\oplus^2} = \frac{a^3}{a_\oplus^3}, \Rightarrow (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) = \mathfrak{M}_\odot \left[\frac{a}{a_\oplus} \right]^3 \left[\frac{T_\oplus}{T} \right]^2, \quad (35)$$

здесь $\mathfrak{M}_\odot, \mathfrak{M}_\oplus$ – массы Солнца и Земли соответственно (здесь также учтено, что $\mathfrak{M}_\oplus \ll \mathfrak{M}_\odot$), $a_\oplus = 1$ а.е. – большая полуось земной орбиты; $T_\oplus = 1$ год – сидерический период обращения Земли вокруг Солнца; T – тот же период обращения для двойной звезды.

Согласно условию задачи период колебания спектра звезды есть $T_s = 1$ сут. По сути, это промежуток времени, между двумя последовательными одинаковыми положениями спектральных линий поглощения, порождаемых в результате поглощения атомами атмосфер данных звезд излучения, распространяющегося из более глубоких и горячих областей их атмосфер. Нетрудно убедиться с использованием кривых для радиальных проекций скоростей данных компонент, что сидерический период обращения системы $T = 2T_s$, тогда имеем окончательное выражение для неравенства в виде:

$$V_0 \geq \sqrt{\frac{2G \mathfrak{M}_\odot}{r_0} \left[\frac{a}{a_\oplus} \right]^3 \left[\frac{T_\oplus}{2T_s} \right]^2} = 0.44 \text{ км/с.}$$

Последнее неравенство выполняется, значит данный корабль сможет покинуть поле тяготения данной звезды, не включая двигателей.

Ответ: сможет. ($\$_{\text{max}} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Заход Солнца за горизонт»

Решение: Как известно, склонение Солнца в течение года изменяется в пределах

$$-23^\circ 26' \leq \delta_\odot \leq +23^\circ 26', \quad (36)$$

следовательно, каждый день в своем суточном движении Солнце перемещается по небосводу вдоль суточной параллели (малому кругу), образующей с горизонтом в точках восхода и захода Солнца угол α , величина которого не превосходит $90^\circ - \varphi$. Определим его. Поскольку суточная параллель является малым кругом, то формулы сферической тригонометрии, справедливые для сферических треугольников, образованных лишь большими кругами здесь неприменимы. Поэтому воспользуемся векторным подходом к решению задачи.

Для этого введем декартову систему координат $OX'Y'Z'$, начало которой совпадает с центром небесной сферы (см. рис. 6), а оси координат ориентированы следующим образом: ось OZ' направлена на северный полюс мира (P_N), ось OY' ориентирована на южную точку экватора A_2 , а ось OX' – на точку запада W . Определим в данной системе координат радиус-вектор Солнца \vec{r}_\odot и единичный вектор \vec{n}_\odot , направленный по касательной к суточной

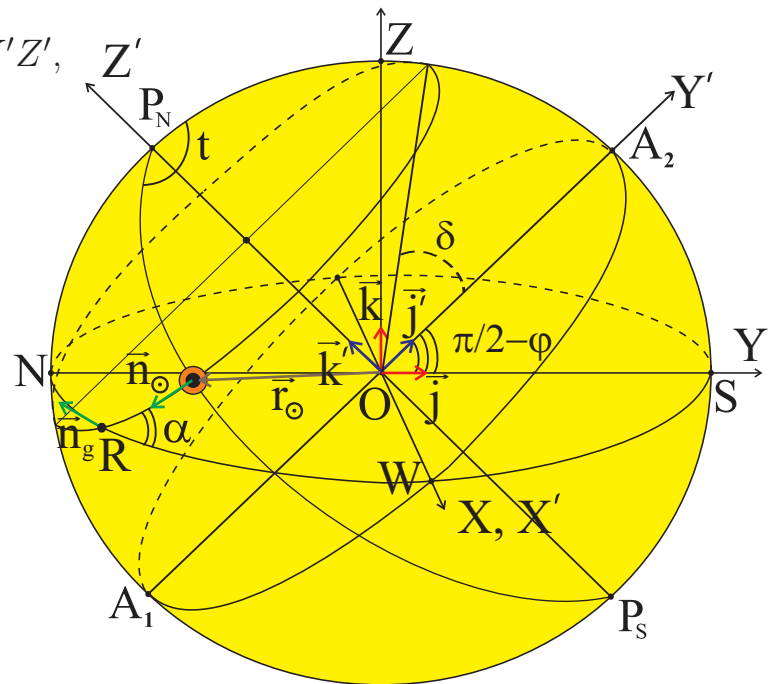


Рис. 6: к определению угла α .

ной параллели и определяющий направление вектора скорости видимого перемещения Солнца по небосводу, обусловленного суточным вращением сферы (радиус последней будем полагать равным единице):

$$\vec{n}_\odot = \cos t \vec{i}' - \sin t \vec{j}', \quad \vec{r}_\odot = \cos \delta \sin t \vec{i}' + \cos \delta \sin t \vec{j}' + \sin \delta \vec{k}'.$$

здесь t, δ – часовой угол и склонение Солнца соответственно; $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ – орты исходной декартовой системы координат. Введем систему координат $OXYZ$, так чтобы начало координат совпадало с центром небесной сферы, ось OZ была направлена на зенит Z , ось OY – на точку юга (S), ось OX – на точку запада (W). Разложим единичные орты \vec{j}', \vec{k}' по ортам \vec{j}, \vec{k} новой системы:

$$\left. \begin{aligned} \vec{i}' &= \vec{i}, \\ \vec{j}' &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \vec{j} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \vec{k} = \sin \varphi \vec{j} + \cos \varphi \vec{k}, \\ \vec{k}' &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \vec{j} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \vec{k} = -\cos \varphi \vec{j} + \sin \varphi \vec{k}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

В итоге данные векторы в системе $OXYZ$ могут быть записаны так

$$\vec{n}_\odot = \cos t \vec{i} - \sin t \sin \varphi \vec{j} - \sin t \cos \varphi \vec{k},$$

$$\vec{r}_{\odot} = \cos \delta \sin t \vec{i} + (\cos \delta \cos t \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi) \vec{j} + (\cos \delta \cos t \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi) \vec{k}.$$

В момент, когда истинное Солнце окажется точно на горизонте (в точке захода R), z -проекция радиуса-вектора должна быть равна нулю, следовательно,

$$\cos \delta \cos t \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi = 0, \Rightarrow \cos t_R = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi.$$

С другой стороны, этот же радиус-вектор и единичный вектор \vec{n}_A (лежит в плоскости математического горизонта и направлен в сторону увеличения азимута) можно записать так

$$\vec{r}_{\odot} = \sin A_R \vec{i} + \cos A_R \vec{j}, \quad \vec{n}_A = \cos A_R \vec{i} - \sin A_R \vec{j},$$

где A_R – азимут точки захода (R). Из сопоставления координат вектора \vec{r}_{\odot} (для момента захода) приходим к заключению, что

$$\left. \begin{aligned} \sin A_R &= \cos \delta \sin t_R, \\ \cos A_R &= \cos \delta \cos t_R \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Искомый угол α теперь можно легко определить с помощью скалярного произведения векторов \vec{n}_{\odot} , \vec{n}_A .

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= (\vec{n}_{\odot} \cdot \vec{n}_A) = \cos A_R \cos t_R + \sin A_R \sin t_R \sin \varphi = \sin \varphi \cos \delta \cos^2 t_R - \\ &- \sin \delta \cos \varphi \cos t_R + \sin \varphi \cos \delta \sin^2 t_R = \sin \varphi \cos \delta + \sin \delta \cos \varphi \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi = \\ &= \sin \varphi / \cos \delta, \end{aligned}$$

т.о. угол между параллелью и горизонтом в точке захода определяется равенством

$$\cos \alpha = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}. \quad (39)$$

Рассмотрим процесс захода Солнца за горизонт (см. рис. 7). Пусть в момент времени t_1 нижняя точка видимого диска Солнца (B_1) коснулась горизонта, что ознаменовало начало данного процесса. При этом видимая высота данной точки $h_{B_1} = 0^\circ$, а истинная высота $-h_{B_1}^{(0)} = h_{B_1} - \delta h$, здесь δh – угол рефракции светового луча на горизонте. Согласно формуле (2) $\delta h = 34.5'$. Истинная высота истинного Солнца при этом равна

$$h_{C_1}^{(0)} = h_{B_1}^{(0)} + \rho_{\odot}'' = h_{B_1} + \rho_{\odot}'' - \delta h,$$

где ρ_{\odot}'' – угловой радиус Солнца.

В момент t_2 верхняя точка видимого диска Солнца (A_2) будет на горизонте, при этом ее видимая высота $h_{A_2} = 0^\circ$. Тогда истинная высота этой точки диска есть $h_{A_2}^{(0)} = h_{A_2} - \delta h$. При этом высота истинного Солнца в этот момент

$$h_{C_2}^{(0)} = h_{A_2}^{(0)} - \rho_{\odot}'' = h_{A_2} - \rho_{\odot}'' - \delta h.$$

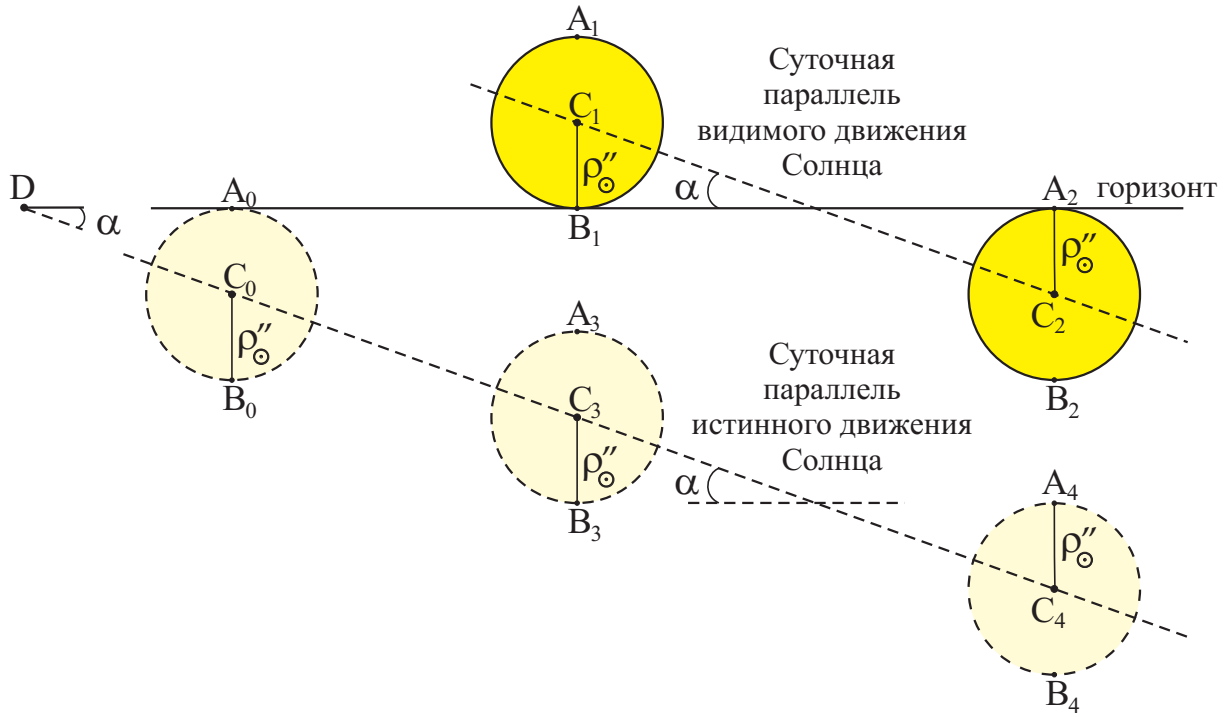


Рис. 7: к определению времени захода Солнца за горизонт и увеличению продолжительности дня.

Следовательно, изменение высоты истинного Солнца во время захода есть

$$\Delta h = h_{C_1}^{(0)} - h_{C_2}^{(0)} = 2\rho_{\odot}''.$$

В результате время захода Солнца за горизонт $\Delta t = t_2 - t_1$ есть

$$\Delta t = \frac{\ell}{\omega_{\text{vis}\odot}} = \frac{\Delta h}{\omega_{\oplus} \sin \alpha \cos \delta} = \frac{2\rho_{\odot}''}{\omega_{\oplus} \sqrt{\cos^2 \delta - \sin^2 \varphi}}, \quad (40)$$

здесь ℓ – длина дуги суточной параллели, вдоль которой перемещается Солнце во время заката; $\omega_{\text{vis}\odot} = \omega_{\oplus} \cos \delta$ – угловая скорость видимого движения Солнца по небосводу в силу суточного вращения небесной сферы.

Замечание. В частности, из (40) следует, что при $|\delta| \geq (90^\circ - |\varphi|)$ действительного результата для Δt не существует, что отвечает ситуации незаходящего светила. На самом деле, как было показано в задаче № 11 настоящего релиза, данная ситуация должна наступать на меньших широтах $\varphi^{(3)} = \varphi^{(1)} - \rho_{\odot}'' - \delta h$ (в обозначениях этой задачи), что объясняется отсутствием учета рефракции и конечности размеров диска Солнца при определении угла α . Следовательно в формуле (40) следует произвести замену $\varphi \rightarrow \varphi + \rho_{\odot}'' + \delta h$. В итоге имеем следующий окончательный результат

$$\Delta t = \frac{\ell}{\omega_{\text{vis}\odot}} = \frac{\Delta h}{\omega_{\oplus} \sin \alpha \cos \delta} = \frac{2\rho_{\odot}''}{\omega_{\oplus} \sqrt{\cos^2 \delta - \sin^2(\varphi + \rho_{\odot}'' + \delta h)}}, \quad (41)$$

Очевидно, что наибольшей продолжительностью закат характеризуется в дни солнцестояний. В частности, для г. Самары при $\rho_{\odot}'' = 16'$, $\delta h = 34.5'$ и $\omega_{\oplus} = 15'/\text{мин}$, $\Delta t_{\text{max}} = 4.92 \text{ мин} = 4 \text{ мин } 55 \text{ сек}$.

Ответ: представляется в виде формулы (41). ($S_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Увеличение продолжительности дня за счет явления рефракции»

Решение: если бы у Земли не было атмосферы, то заход Солнца в момент времени t_0 (когда верхняя точка истинного диска Солнца (A_0) находилась точно на горизонте, см. рис. 7) за горизонт означивал окончание земного дня. При этом высота истинного Солнца равна (в обозначениях предыдущей задачи)

$$h_{C_0}^{(0)} = -\rho''_{\odot}.$$

В действительности, в силу явления рефракции видимый диск Солнца "поднимается" над горизонтом по отношению истинному его положению. Окончание дня наступает в момент времени t_2 , когда верхняя точка видимого диска Солнца A_2 окажется точно на горизонте (см. рис. 7). При этом высота центра истинного диска Солнца равна

$$h_{C_2}^{(0)} = -\delta h - \rho''_{\odot}.$$

Следовательно, на промежуток времени $\delta t' = t_2 - t_0$ удлиняется продолжительность дня вечером. За этот промежуток времени высота Солнца изменяется на величину

$$\Delta h' = h_{C_0}^{(0)} - h_{C_2}^{(0)} = \delta h.$$

При этом

$$\delta t' = \frac{\ell'}{\omega_{\text{vis } \odot}} = \frac{\Delta h'}{\omega_{\oplus} \sin \alpha \cos \delta} = \frac{\delta h}{\omega_{\oplus} \sqrt{\cos^2 \delta - \sin^2 \varphi}}.$$

здесь ℓ' – длина дуги суточной параллели, вдоль которой перемещается Солнце в течение промежутка $\delta t'$. Поскольку такое же удлинение дня должно быть на восходе, то промежуток времени ($\Delta \tau_d$), на который увеличивается продолжительность дня за счет явления рефракции света в атмосфере Земли есть

$$\Delta \tau_d = 2\delta t' = \frac{2 \delta h}{\omega_{\oplus} \sqrt{\cos^2 \delta - \sin^2 \varphi}}, \quad \text{где согласно (2) } \delta h = 34.5'. \quad (42)$$

С учетом замечания, сделанного в предыдущей задаче, результат (42) модифицируется к виду:

$$\Delta \tau_d = 2\delta t' = \frac{2 \delta h}{\omega_{\oplus} \sqrt{\cos^2 \delta - \sin^2(\varphi + \rho''_{\odot} + \delta h)}}. \quad (43)$$

На рис. 8.а представлены зависимость промежутка времени $\Delta \tau_d$ от склонения Солнца. В силу четности функции $\Delta \tau_d(\delta)$, кривая симметрична относительно оси ординат. Максимальное удлинение продолжительности суток за счет

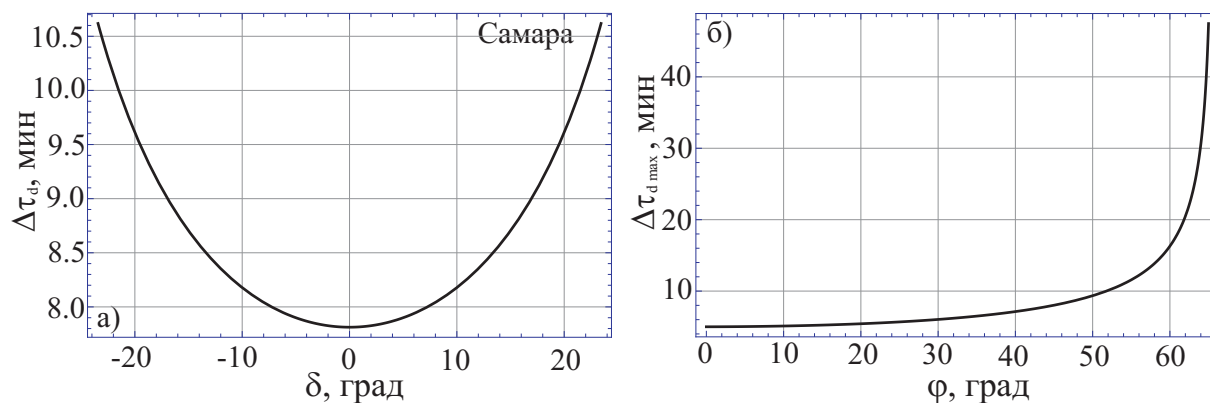


Рис. 8: зависимость промежутка времени ($\Delta\tau_d$), на который увеличивается продолжительность дня за счет явления рефракции света в атмосфере Земли а) от склонения Солнца на широте г. Самары; б) от широты φ местности для дня летнего солнцестояния (в случае северного геополушария).

явления рефракции света в атмосфере Земли достигается в дни солнцестояний (зимой и летом при $\delta = \pm 23^\circ 26'$). Так для г. Самары эта величина равна $\Delta\tau_{d \max} = 10.62$ мин. Минимальное значение искомым параметр принимает в дни равноденствий. Для г. Самары эта величина есть $\Delta\tau_{d \min} = 7.81$ мин. Ради большей полноты анализа результата на рис. 8.б представлен график зависимости промежутка времени $\Delta\tau_d$ от широты местности (в случае северного геополушария) для дня летнего солнцестояния. Из последнего результата, что чем ближе местоположение наблюдателя к северному полярному кругу, тем больше искомая величина. Например, для г. Саранска она составляет $\Delta\tau_{d \max} = 11.11$ мин, для г. Москвы – $\Delta\tau_{d \max} = 12.05$ мин, для Санкт-Петербурга – $\Delta\tau_{d \max} = 16.22$ мин, а на широте $+65^\circ$ искомая величина достигает 47.5 мин.

Ответ: представляется выражением (43); искомый график представлен на рис. 8.а; при $\delta = \pm 23^\circ 26'$ искомая величина $\Delta\tau_d$ принимает максимальное значение; это бывает летом и зимой в дни солнцестояний. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Период малых поперечных колебаний космической станции в системе "Земля-Луна"»

Решение: Рассмотрим движение космической станции (КС) в гравитационном поле Земли и Луны. Запишем второй закон Ньютона для станции, находящейся в малой окрестности указанной в условии задачи точки (т. О, см. рис. 9):

$$m \vec{a} = -\frac{G m M_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \vec{r}_{\oplus} - \frac{G m M_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} \vec{r}_{\zeta}. \quad (44)$$

Введем декартову систему координат так, чтобы ось ОХ была направлена вдоль прямой, соединяющей центры указанных тел и направлена к Луне. Ось ОУ ориентируем в перпендикулярном направлении. Запишем уравнение (44)

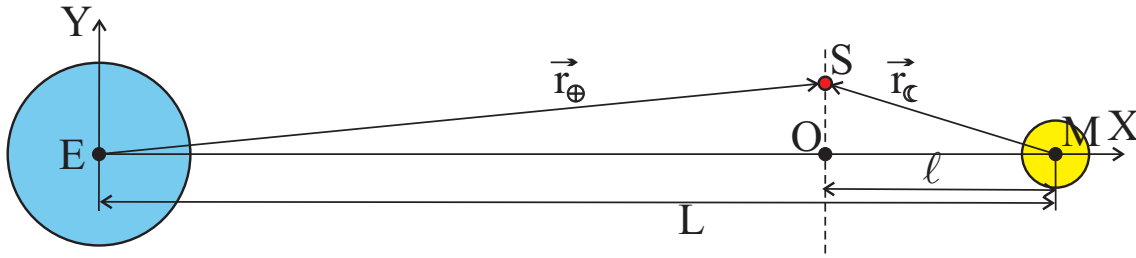


Рис. 9: К определению периода колебаний станции.

в проекциях на оси OX и OY:

$$\text{на OX: } 0 = -\frac{G m \mathfrak{M}_{\oplus}}{((L - \ell)^2 + y^2)^{3/2}}(L - \ell) + \frac{G m \mathfrak{M}_{\zeta}}{(\ell^2 + y^2)^{3/2}}\ell, \Rightarrow$$

здесь $L = 384399$ км – расстояние между Луной и Землей, ℓ – расстояние от Луны до указанной точки O ; y – отклонение КС в плоскости, перпендикулярной прямой "Земля-Луна" от точки O . Учитывая, что $y \ll \ell, L$, тогда

$$0 \approx -\frac{G m \mathfrak{M}_{\oplus}}{(L - \ell)^2} + \frac{G m \mathfrak{M}_{\zeta}}{\ell^2}, \Rightarrow \frac{\ell}{L - \ell} = \frac{\mathfrak{M}_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus}} = \alpha = 1.23 \cdot 10^{-2}, \Rightarrow$$

$$\ell = \frac{\alpha}{1 - \alpha} L = 1.25 \cdot 10^{-2} L = 4788 \text{ км.} \quad (45)$$

$$\text{на OY: } m a_y = -\frac{G m \mathfrak{M}_{\oplus}}{((L - \ell)^2 + y^2)^{3/2}}y - \frac{G m \mathfrak{M}_{\zeta}}{(\ell^2 + y^2)^{3/2}}y, \Rightarrow$$

$$m \ddot{y} \approx -\frac{G m \mathfrak{M}_{\oplus}}{(L - \ell)^3}y - \frac{G m \mathfrak{M}_{\zeta}}{\ell^3}y,$$

или

$$\ddot{y} + \left[\frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}}{(L - \ell)^3} + \frac{G \mathfrak{M}_{\zeta}}{\ell^3} \right] y = 0. \quad (46)$$

Как известно, уравнение гармонических колебаний представляется в виде:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0, \quad (47)$$

здесь ω_0 – собственная частота колебаний материальной точки. Из сопоставления уравнений (46) и (47) приходим к заключению, что движение космической станции вдоль оси OY подчиняется уравнению гармонических колебаний с собственной частотой, равной

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}}{(L - \ell)^3} + \frac{G \mathfrak{M}_{\zeta}}{\ell^3}} = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}}{L^3} \frac{(1 + \alpha^2)(1 + \alpha)^3}{\alpha^2}} = 2.19 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}. \quad (48)$$

Как известно, период колебаний связан с собственной частотой выражением вида:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L^3}{G \mathfrak{M}_{\oplus}} \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)(1 + \alpha)^3}} = 28642 \text{ с} = 7.96 \text{ часа.} \quad (49)$$

Ответ: представлен выражением и численным значением (49). ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Топ-13 ближайших к Солнцу звезд и гравитационная граница Солнечной системы»

Решение. В небесной механике и космонавтике часто используют такое понятие как *гравитационная сфера*. Для ее определения необходимо, как минимум, рассмотреть три взаимно гравитирующих тела. Дадим определение этого понятия на примере системы «Солнце-планета-пробное тело».

Пусть пробное тело T (спутник планеты) с массой \mathcal{M}_T движется в ньютоновском поле тел P (планета) и S (Солнце) с массами \mathcal{M}_P и \mathcal{M}_S соответственно (см. рис. 10). Все пространство возможных положений тела T можно разбить на две части: область V_P , где доминирует притяжение P , и остальное пространство V_S . Область V_P называют *гравитационной сферой* P по отношению к S . Часто так же гравитационной сферой называют *поверхность* σ , разделяющую пространства V_P и V_S , что не приводит к путанице.

Выберем декартову систему координат так как показано на рис. 10, а именно, ось X проведем через точки S и P , начало координат совместим с точкой P . Ось Y проведем в плоскости круговой орбиты P в сторону ее движения, а ось Z (не показана на рисунке) направим к нам. В данной системе координат определим компоненты и модули выше указанных векторов:

$$\vec{r}_P = (r_P, 0, 0), \quad \Delta\vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{r}_T = \vec{r}_P + \Delta\vec{r} = (r_P + x, y, z). \quad (50)$$

$$|\vec{r}_P| = r_P, \quad |\Delta\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad |\vec{r}_T| = \sqrt{(r_P + x)^2 + y^2 + z^2}.$$

Из курса теоретической механики² известно, что система двух тел «Солнце-планета» (без учета влияния других тел Солнечной системы) движутся в пространстве относительно их общего центра масс по круговым орбитам, вся система равномерно вращается вокруг оси Z с угловой скоростью ω , определяемой третьим законом Кеплера. При этом радиус окружности, которую описывает в своем движении точка P вокруг центра масс есть $r_R \cdot \mathcal{M}_S / (\mathcal{M}_S + \mathcal{M}_P)$.

Движение тела T в системе XYZ вызывается силами притяжения к S и P , а также центробежной и кориолисовой силой инерции. Как известно, ко-

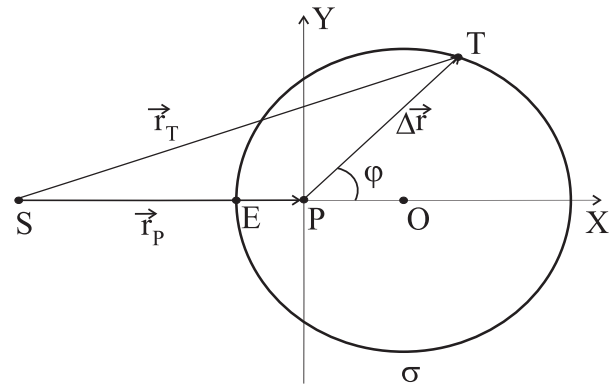


Рис. 10: к определению гравитационной сферы.

²См. например, Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. – Ижевск: изд-во РХД. – 2007.

риолисова сила не производит работы, а остальные три силы консервативны. Следовательно, должен выполняться закон сохранения механической энергии:

$$\frac{\mathfrak{M}_T \cdot V^2}{2} - \frac{G \cdot \mathfrak{M}_T \cdot \mathfrak{M}_S}{r_T} - \frac{G \cdot \mathfrak{M}_T \cdot \mathfrak{M}_P}{\Delta r} - \frac{\mathfrak{M}_T \cdot \omega^2}{2} \left(\left(\frac{\mathfrak{M}_S}{\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_P} r_P + x \right)^2 + y^2 \right) = - \frac{G(\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_P)\mathfrak{M}_T h}{2r_P}, \quad (51)$$

здесь V — скорость тела T , h — безразмерная постоянная, называемая постоянной Якоби в честь получившего интеграл движения (51) немецкого ученого.

После сокращения на массу \mathfrak{M}_T можно записать

$$\frac{V^2}{2} = \frac{G\mathfrak{M}_S}{r_T} + \frac{G\mathfrak{M}_P}{\Delta r} + \frac{\omega^2}{2} \left(\left(\frac{\mathfrak{M}_S}{\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_P} r_P + x \right)^2 + y^2 \right) - \frac{G(\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_P)}{2r_P} h. \quad (52)$$

Поскольку $V^2 \geq 0$, то справа в (52) стоит величина, неотрицательная в любой момент времени движения. Часть пространства, определяемая неравенством вида

$$\frac{G\mathfrak{M}_S}{r_T} + \frac{G\mathfrak{M}_P}{\Delta r} + \frac{\omega^2}{2} \left(\left(\frac{\mathfrak{M}_S}{\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_P} r_P + x \right)^2 + y^2 \right) \geq \frac{G(\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_P)}{2r_P} h.$$

называют **областью возможных движений**. Ее граница σ задается соответствующим уравнением

$$\frac{G\mathfrak{M}_S}{r_T} + \frac{G\mathfrak{M}_P}{\Delta r} + \frac{\omega^2}{2} \left(\left(\frac{\mathfrak{M}_S}{\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_P} r_P + x \right)^2 + y^2 \right) = \frac{G(\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_P)}{2r_P} h.$$

и называется **поверхностью нулевой скорости** или **поверхностью Хилла** в честь американского астронома и математика, который ввел это понятие.

Сферой Хилла называют поверхность нулевой скорости (гравитационную сферу), для которой полная механическая энергия тела T равна нулю (т.е. постоянная $h = 0$). Выход тела T за пределы данной сферы означает, что последний перестает быть, в принципе, спутником планеты P . В данном случае последнее уравнение представляется в виде:

$$\frac{G\mathfrak{M}_S}{r_T} + \frac{G\mathfrak{M}_P}{\Delta r} + \frac{\omega^2}{2} \left(\left(\frac{\mathfrak{M}_S}{\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_P} r_P + x \right)^2 + y^2 \right) = 0, \quad (53)$$

Учтем далее, что в плоскости PXY : $\Delta r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_P \cdot x = r_P \cdot \Delta r \cdot \cos \varphi$. Введем далее ряд вспомогательных обозначений:

$$\beta = \frac{\Delta r}{r_P} < 1, \quad \mu = \frac{\mathfrak{M}_P}{\mathfrak{M}_S} \ll 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2 r_P^3}{G\mathfrak{M}_S} = 1 + \mu. \quad (54)$$

Последний результат следует тривиальным образом из третьего обобщенного закона Кеплера:

$$(\mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_P) = \frac{\omega^2 r_P^3}{G}.$$

Уравнение (53) с учетом уравнения (54) можно представить в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 + 2\beta \cos \varphi}} + \frac{\mu}{\beta} + \frac{(1 + \mu)}{2} \left(\left(\frac{1}{1 + \mu} \right)^2 + \left(\frac{2}{1 + \mu} \right) \beta \cos \varphi + \beta^2 \right) = 0.$$

Очевидно, что ближе всего поверхность Хилла располагается к планете на прямой SP , поскольку на этой прямой располагается Солнце (и, следовательно, ближе всего к планете), самый сильный "конкурент" планеты, способный отобрать у нее спутник (это можно и строго доказать, исследуя левую часть последнего равенства на экстремум, как функцию двух переменных), следовательно, $\varphi = \pi$, $\cos \varphi = -1$.

$$\frac{1}{(1 - \beta)} + \frac{\mu}{\beta} + \frac{(1 + \mu)}{2} \left(\frac{1}{1 + \mu} - \beta \right)^2 = 0.$$

Продифференцируем последнее уравнение по переменной β , в результате получим уравнение гравитационных и центробежной сил:

$$\frac{1}{(1 - \beta)^2} - \frac{\mu}{\beta^2} - (1 - (1 + \mu)\beta) = 0.$$

Разделим все уравнение на $(1 + \mu)$. Введем параметр $\eta = \mu/(1 + \mu)$, $\Rightarrow \mu = \frac{\eta}{1 - \eta}$, тогда последнее уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{(1 - \eta)}{(1 - \beta)^2} - \frac{\eta}{\beta^2} - (1 - \eta - \beta) = 0, \quad \Rightarrow \quad (1 - \eta)\beta^2 - \eta(1 - \beta)^2 = (1 - \eta - \beta)(1 - \beta)^2 \beta^2,$$

в итоге

$$\beta^5 - (3 - \eta)\beta^4 + (3 - 2\eta)\beta^3 - \eta\beta^2 + 2\eta\beta - \eta = 0. \quad (55)$$

интересующий нас корень β уравнения принадлежит интервалу $0 < \beta < 1$, его легко представить в виде бесконечного ряда разложения по параметру η . Для этого представим уравнение (55) в удобном для разложения виде:

$$\beta^3 = \eta \left[\frac{1 - 2\beta + \beta^2 + 2\beta^3 - \beta^4}{3 - 3\beta + \beta^2} \right]. \quad (56)$$

Правую часть последнего уравнения будем представлять функцией $f(\beta)$. Данную функцию можно представить в виде бесконечного ряда (ряд Маклорена по переменной β):

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \eta \left[\frac{1 - 2\beta + \beta^2 + 2\beta^3 - \beta^4}{3 - 3\beta + \beta^2} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n = \\ &= \frac{\eta}{3} \left[1 - \beta - \frac{2}{3}\beta^2 + 2\beta^3 + \mathcal{O}(\beta^4) \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Последний результат можно получить, например, с помощью системы Mathematica, (команда Series). Подставляя (57) в уравнение (56) и извлекая корень третьей степени из левой и правой части, в результате получаем:

$$\beta = \nu \left[1 - \frac{1}{3}\beta - \frac{2}{9}\beta^2 + \frac{2}{3}\beta^3 + \mathcal{O}(\beta^4) \right], \quad \nu = \sqrt[3]{\frac{\eta}{3}}. \quad (58)$$

При записи последнего мы учли, что $\beta \ll 1$, тогда все слагаемые под корнем с ненулевой степенью по переменной β есть малая величина, следовательно, можно воспользоваться биномиальным приближением $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot x$, при $x \ll 1$. Решение полученного уравнения будем искать в виде бесконечного ряда (разложения по переменной $\nu \ll 1$):

$$\beta(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \nu^n. \quad (59)$$

Подставляя последний результат в (58) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ν , в итоге получаем систему рекурсивных соотношений между параметрами:

$$\begin{aligned} b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = -\frac{1}{3}b_1, \quad b_3 = -\frac{1}{3}b_2 - \frac{2}{9}b_1^2 = -\frac{1}{9}, \text{ и т.д.} \Rightarrow \\ \beta(\nu) = \nu - \frac{1}{3}\nu^2 - \frac{1}{9}\nu^3 + \mathcal{O}(\nu^4). \end{aligned} \quad (60)$$

учитывая, что

$$\nu = \sqrt[3]{\frac{\eta}{3}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3(1+\mu)}} \approx \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}, \quad (61)$$

следует иметь в виду, что все слагаемые, пропорциональные ν^n с $n > 3$ малы, при чем с ростом параметра n (принимает значения из множества натуральных чисел) каждое последующее слагаемое существенно меньше предыдущего ($\mu \ll 1$). Поэтому в качестве радиуса сферы Хилла традиционно принимают выражение, определяемое первыми тремя слагаемыми выражения (60), т.е. ограничиваемся линейным слагаемым по параметру μ :

$$R_{\text{Хилл}} \approx r_P \cdot \left[\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{9} \left(\frac{\mu}{3}\right) \right]. \quad (62)$$

В таблице 4 представлены значения сферы Хилла для 13 рассматриваемых ближайших звезд. Здесь $\mu = \frac{m_{\odot}}{m_{*}}$, а также учтено, что α Центавра, Сириус, Лейтен 726-8 являются двойными, расстояние между которыми существенно меньше расстояния до Солнца и потому эти пары звезд можно рассматривать как одну. Из сравнения значений радиусов сферы Хилла следует, что минимальное значение радиуса сферы Хилла обусловлено гравитационным взаимодействием Солнечной системы с ближайшей двойной звездой – α Центавра. Полученное значение сферы Хилла идентично значению гравитационной границы Солнечной системы, представленному в научно-популярной литературе.

№	Звезда	г, св. год	$1/\mu$	R_{Hill} , св.л.
1	Проксима Центавра	4.2421	0.123	2.973
2	α Центавра	4.3650	2.00	1.874
3	Звезда Барнарда	5.9630	0.17	4.014
4	Вольф 359	7.7825	0.11	5.525
5	Лаланд 21185	8.2905	0.46	4.802
6	Сириус	8.5828	2.998	3.343
7	Лейтен 726-8	8.7280	0.20	5.749
8	Росс 154	9.6813	0.17	6.517
9	Росс 248	10.322	0.136	7.147
10	ε Эридана	10.522	0.82	5.477

Таблица 4: значения радиусов сфер Хилла для Солнечной системы по отношению к указанным звездам.

Ответ: гравитационное взаимодействие Солнечной системы с ближайшей двойной звездой – α Центавра определяет ее гравитационную границу; $R_{\text{Hill}} = 1.874$ св.г. ($\$_{\text{max}} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Космический лифт и запуск КА с помощью него»

Решение:

а) рассмотрим вопрос об относительной экономии энергии (в процентах) при доставке груза на орбиту с помощью КЛ в сравнение с ракетным способом.

Ракетный способ доставки груза. В идеальном случае полезная работа, которую необходимо совершить для подъема полезного груза массы Δm на стационарную орбиту радиуса r в геоцентрической системе отсчета, запишется так:

$$A_{\text{rocket}} = \left(\frac{\Delta m V^2}{2} - \frac{G \Delta m \mathcal{M}_{\oplus}}{r} \right) - \left(\frac{\Delta m V_{\oplus}^2}{2} - \frac{G \Delta m \mathcal{M}_{\oplus}}{\mathcal{R}_{\oplus}} \right) =$$

$$\frac{G \Delta m \mathcal{M}_{\oplus}}{\mathcal{R}_{\oplus}} \left(1 - \frac{\mathcal{R}_{\oplus}}{2r} \right) - \frac{\Delta m \omega_{\oplus}^2 \mathcal{R}_{\oplus}^2}{2}, \text{ где } V^2 = \frac{G \mathcal{M}_{\oplus}}{r}.$$

или

$$A_{\text{rocket}} = \Delta m g_0 \mathfrak{R}_{\oplus} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\kappa \right], \quad (63)$$

$$\text{где } x = \left(\frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{r} \right), \quad \kappa = \frac{\omega_{\oplus}^2 \mathfrak{R}_{\oplus}}{g_0} = 3.46 \cdot 10^{-3}.$$

Доставка груза с помощью КЛ. В идеальном случае полезная работа, которую необходимо совершить для подъема полезного груза массы Δm на круговую стационарную орбиту, в геоцентрической системе, с помощью КЛ, тратится лишь на изменение его потенциальной энергии, ибо изменение кинетической энергии относительно лифта (а, следовательно, и Земли) не происходит – его геоцентрическая скорость автоматически возрастает вместе с капсулой КЛ по мере ее подъема, тогда

$$A_{\text{lift}} = \left(-\frac{G \Delta m \mathfrak{M}_{\oplus}}{r} \right) - \left(-\frac{G \Delta m \mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}} \right) = \Delta m g_0 \mathfrak{R}_{\oplus} (1 - x). \quad (64)$$

Следовательно, относительная экономия энергии при доставке груза есть

$$\eta = \frac{A_{\text{rocket}} - A_{\text{lift}}}{A_{\text{rocket}}} \times 100\% = \frac{(x - \kappa)}{(2 - x - \kappa)} \times 100\%. \quad (65)$$

Большинство космических аппаратов имеют орбиты, радиусы которых принадлежат интервалу:

$$\mathfrak{R}_{\oplus} + 200\text{км} \leq r \leq 10 \mathfrak{R}_{\oplus}, \quad \Rightarrow \quad 0.1 \leq x \leq 0.94.$$

Следовательно

$$\eta \approx \frac{x}{(2 - x)} \times 100\%. \quad (66)$$

На рис. 11 представлена зависимость величины η от радиуса стационарной орбиты $1/x$ (в радиусах Земли). Очевидно, чем меньше радиус (высота) орбиты, тем больше η . Так для самых низкоорбитальных спутников (с высотой орбиты 200 км), эта величина достигает $\eta_{\text{max}} = 94.1\%$, для МКС (с высотой орбиты, равной 415 км) эта величина составляет $\eta = 88.5\%$, для гео-стационарной орбиты (с высотой 35786 км) $\eta = 8.0\%$. Т.о. экономия энергии с помощью КС весьма значительна.

б) определим искомые геоцентрические расстояния. Для этого вычислим геоцентрическое расстояние r_c , на котором геоцентрическая скорость капсулы КЛ равна второй космической скорости относительно центра Земли. Для это учтем, что скорость капсулы линейно возрастает с геоцентрическим расстоянием r :

$$V_{gc} = \omega_{\oplus} r. \quad (67)$$

При этом полная механическая энергия капсулы на данном расстоянии должна быть равна нулю:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m_{\text{ec}} V_{gc}^2 - \frac{G m_{\text{ec}} m_{\oplus}}{r} = 0, \Rightarrow V_{gc} = \sqrt{\frac{2G m_{\oplus}}{r}}. \quad (68)$$

Из выражений (67) и (68) следует, что

$$r_c = \sqrt[3]{\frac{2G m_{\oplus}}{\omega_{\oplus}^2}} = 53122.5 \text{ км}. \quad (69)$$

Т.о. для преодаления КА гравитационного притяжения Земли с помощью КЛ необходимо, чтобы трос последнего простирался до указанного геоцентрического расстояния.

Определим геоцентрическое расстояние r_{ℓ} , отсчитываемое вдоль троса КЛ, при котором возможен перелет КА (после отстыковки от КЛ) от окрестности Земли (E) на орбиту верхней планеты (EхP, см. рис. 12.а) по дуге эллипса – орбите Гомана-Ветчинкина. Для этого будем полагать, что орбиты всех классических планет круговые, радиус которых равен их большой полуоси, а плоскости совпадают с плоскостью орбиты Земли.

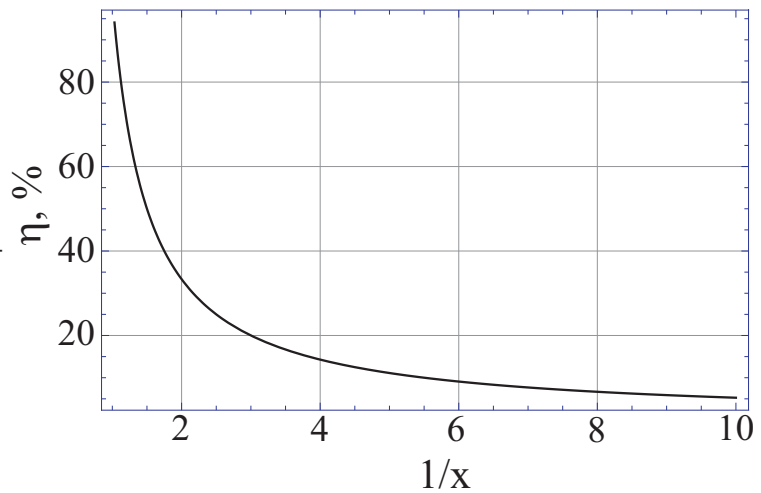


Рис. 11: зависимость относительной экономии энергии от радиуса стационарной орбиты (в радиусах Земли).

Очевидно, гелиоцентрическая скорость КА \vec{V}_{hc} будем максимальной в случае, когда гелиоцентрическая скорость Земли \vec{V}_{\oplus} и вектор геоцентрической скорости КА \vec{V}_{gc} , находящегося на тросе КЛ, сонаправлены. В этом случае $V_{hc} = V_{\oplus} + V_{gc} > V_{hc}^{(0)}$, здесь $V_{hc}^{(0)}$ – гелиоцентрическая скорость тела, движущегося по круговой орбите радиуса $a_{\oplus} + r_{\ell}$ относительно Солнца. Тогда КА должен двигаться по эллипсу, перигелий (P) которого совпадает с точкой старта КА, а афелий (A) совпадает с точкой орбиты планеты, расположенной диаметрально противоположно к P по отношению к Солнцу. Воспользуемся законами сохранения энергии и момента импульса (последние должны выполняться в центральном гравитационном поле Солнца):

$$\text{з-н сох-ия мом-та импульса: } \Delta m (V_{\oplus} + V_{gc}) a_{\oplus} = \Delta m V_A r_{\text{Exp}},$$

$$\text{з-н сох-ия энергии: } \frac{1}{2} \Delta m (V_{\oplus} + V_{gc})^2 - \frac{G \Delta m m_{\odot}}{a_{\oplus} + r_{\ell}} = \frac{1}{2} \Delta m V_A^2 - \frac{G \Delta m m_{\odot}}{r_{\text{Exp}}}.$$

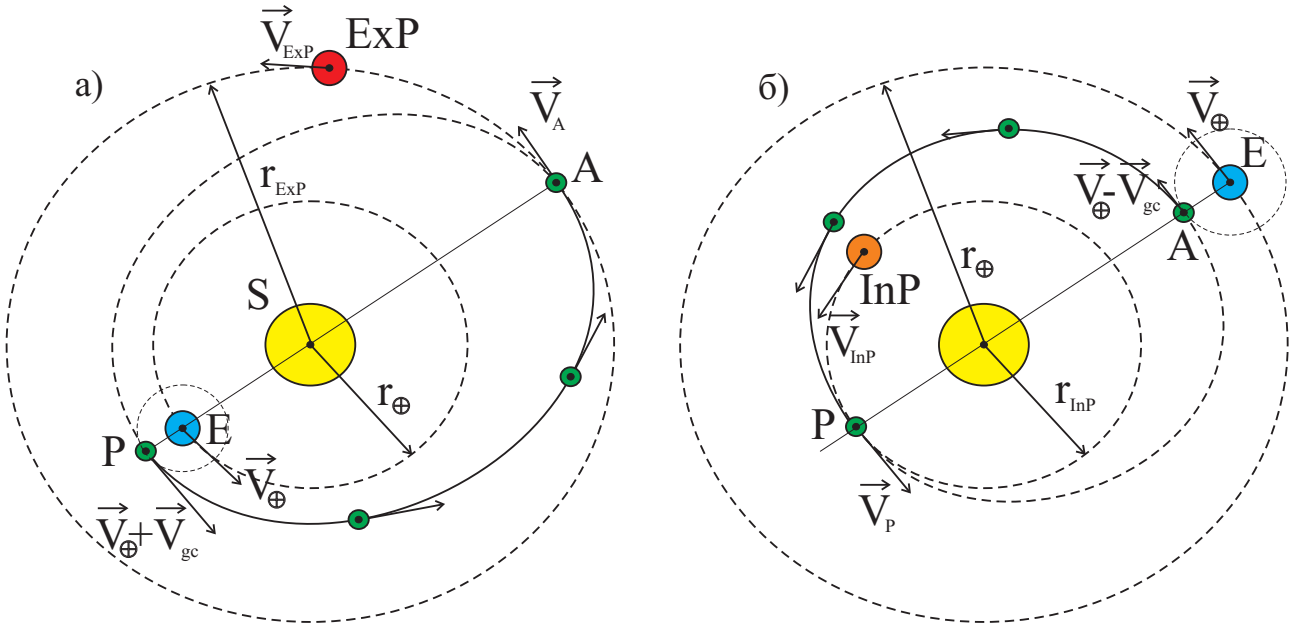


Рис. 12: траектория полета КА (орбита Гомана-Ветчинкина), запущенного с помощью КЛ к а) верхней планете, б) нижней планете Солнечной системы.

Здесь r_{Exp} – радиус орбиты верхней планеты. Выражая из первого уравнения V_A и подставляя его во второе уравнение, с учетом $a_{\oplus} = 1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м} \gg r_{\ell}$, в итоге получаем

$$(V_{\oplus} + V_{gc})^2 \left[1 - \left(\frac{a_{\oplus}}{r_{Exp}} \right)^2 \right] = \frac{2G \mathcal{M}_{\odot}}{a_{\oplus}} \left[1 - \frac{a_{\oplus}}{r_{Exp}} \right], \Rightarrow$$

$$V_{gc} = V_{\oplus} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{a_{\oplus}}{r_{Exp}}}} - 1 \right], \text{ где } V_{\oplus} = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_{\odot}}{a_{\oplus}}} = 29.79 \text{ км/с.}$$

откуда

$$r_{\ell} = \frac{V_{\oplus}}{\omega_{\oplus}} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{a_{\oplus}}{r_{Exp}}}} - 1 \right]. \quad (70)$$

Для запуска КА к нижней планете Солнечной системы (с радиусом орбиты r_{InP}), оптимальным вариантом запуска КА является ситуация, когда скорости \vec{V}_{\oplus} и \vec{V}_{gc} противоположно направлены (см. рис. 12.б). Рассуждая аналогично предыдущему случаю с учетом замены во всех выражениях

$$(V_{\oplus} + V_{gc}) \rightarrow V_{\oplus} - V_{gc}, \quad r_{Exp} \rightarrow r_{InP}$$

в итоге получаем

$$r_{\ell} = \frac{V_{\oplus}}{\omega_{\oplus}} \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{a_{\oplus}}{r_{InP}}}} \right]. \quad (71)$$

Планета	r_p , а.е.	r_ℓ , тыс. км	Планета	r_p , а.е.	r_ℓ , тыс. км
Меркурий	0.3871	103.31	Сатурн	9.537	141.10
Венера	0.7233	34.23	Уран	19.19	154.71
Марс	1.524	40.40	Нептун	30.07	159.82
Церера	2.766	86.59	Плутон	39.48	162.01
Юпитер	5.203	120.59	Эрида	67.67	164.97

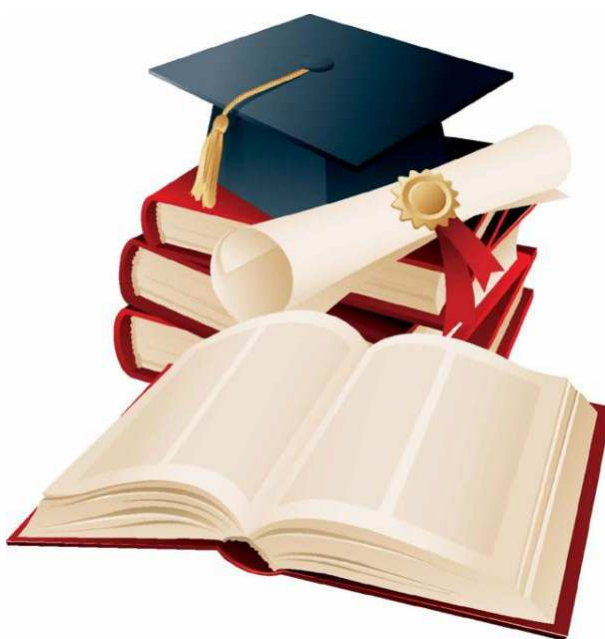
Таблица 5: Гелиоцентрическое расстояние (r_p) для классических и карликовых планет Солнечной системы и соответствующие значения геоцентрического расстояния r_ℓ для запуска КА с троса КЛ к соответствующему небесному телу, по эллиптической траектории Гомана-Ветчинкина.

В таблице 12 представлены вычисленные значения параметра r_ℓ . Очевидно, что запуск КА к ближайшим классическим планетам Солнечной системы (к Венере и Марсу) может производиться с расстояний $r_\ell < r_g$ (из точек, расположенных ниже геостационарной орбиты). Однако, уже запуск КА к Меркурию или Юпитеру уж требует использования троса с длиной более 120 тыс. км. А полеты КА к Урану, Нептуну, Плутону и Эриде требует использования сверхдлинного троса с $L = 148 \div 158$ тыс. км.

Важно отметить и принципиальное различие суточного времени запуска КА: в случае полета к верхней планете Солнечной системы запуск аппарата должен производиться в истинную полночь, когда КА находится по другую сторону от Солнца (см. рис. 12.а). В случае полета к нижней планете Солнечной системы запуск аппарата должен производиться в истинный полдень, когда КА находится на прямой соединяющей Солнце и Землю (см. рис. 12.б).

Ответ: а) (66), см. рис.11; б) (70), (71), см. таблицу 5; в случае полета КА к верхним планетам Солнечной системы его запуск должен производиться в истинную полночь, в случае полета к нижним – в истинный полдень. ($\$_{\max} = 15$ баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре) на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете) на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.